

局所的変分法による非補償型時系列IRT

玉野 浩嗣^{†,††} 持橋 大地^{††}

† NEC データサイエンス研究所 〒211-8666 神奈川県川崎市中原区下沼部 1753

†† 統計数理研究所 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

E-mail: †h-tamano@nec.com, ††daichi@ism.ac.jp

あらまし 項目応答理論 (IRT) の時間発展版にあたるナレッジトレーシングは、学習者の潜在スキル状態の時間変化を推定し、各問題に正解できるかどうかを予測するモデルである。教育ドメインの特性上、ナレッジトレーシングは予測精度以外に、予測モデルの解釈性や、予測理由の説明性が重要となる。これには人間が理解可能なスキル名を使った説明が必要不可欠である。スキルをある問題に関連付ける場合、それらスキルがすべて満たされることでその問題が解けるとすることが一般的である。このようなモデルは多次元項目応答理論において非補償型モデルと呼ばれ、非補償型モデルを使った予測理由の説明は自然である。そこで、本研究では非補償型の項目応答モデルを持つ確率モデルによる、解釈可能なナレッジトレーシングを提案する。提案モデルは線形動的システムをベースとし、出力確率に非補償型の項目応答モデルを用いる。状態潜在変数の事後確率が解析的に得られなくなる問題に対し、局所的変分法により事後確率をガウス近似する方法を提案する。人工データにより提案方法が真の事後分布を近似できていることを確認し、ASSISTment Data により深層学習ベースの手法に対しても高い予測性能を示すことを確認する。

キーワード 教育工学, 項目応答理論, ナレッジトレーシング, カルマンフィルター, 変分近似

Non-compensatory Temporal IRT with Local Variational Approximation

Hiroshi TAMANO^{†,††} and Daichi MOCHIIHASHI^{††}

† NEC Data Science Laboratories 1753 Shimonumabe, Nakahara-ku, Kawasaki-shi 211-8666 Japan

†† The Institute of Statistical Mathematics 10-3 Midori-cho, Tachikawa-shi 190-8562 Japan

E-mail: †h-tamano@nec.com, ††daichi@ism.ac.jp

Abstract Knowledge tracing, the time varying extension of item response theory (IRT), is a task to trace learner's latent skill states to predict whether the learner can answer a new question correctly. Due to its educational domain, knowledge tracing needs high interpretability of its prediction and explainability of its result. As for explainability, explanation with human interpretable skills is necessary, which are usually given as conjunctive conditions. Such a model is called a non-compensatory model in multi-dimensional IRT and explanation using non-compensatory item response model is desired. To realize an interpretable and explainable knowledge tracing, we propose a probabilistic model based on non-compensatory item response model combined with a linear dynamical system. Since it results in a complicated posterior on the skill states of the learners, we approximate it using a local variational distribution. We also show that our posterior adequately approximates the true posterior in artificial data, and our prediction performance is better than two popular deep learning based knowledge tracing in ASSISTment Data.

Key words Educational Technology, IRT, Knowledge Tracing, Kalman Filter, Variational Approximation

1. まえがき

教育のデジタル化により学習履歴データが蓄積され、データに基づき個々の学習者に適した学びを提供するアダプティブラーニングシステムの利用が広がっている [1] [2]. 教育のデジタル化では、PC, タブレット PC, スマートフォンなどを利

用したデジタル教材や、Coursera や Udacity などの Massive Open Online Courses (MOOCs) によるオンライン学習により、学習者がいつ、どのコンテンツをどれくらい学習したかなどの様々なログが蓄積され、テスト結果との関連の分析などが進められている [3]. また、アダプティブラーニングとしては、米 Knewton 社 [1] に代表されるように、学習履歴から個々に最

適な課題のレコメンデーションが提示され、学習効果を上げている。

アダプティブラーニングシステムにおいて、学習者のスキル状態を追跡し、個々に適した学習コンテンツを推薦するために中心的な役割を果たす技術がナレッジトレーシングである。ナレッジトレーシングは、学習者が問題を解いた時系列正誤ログを入力として、次のタイムステップにおいて、ある問題を正解できるかどうかを予測する。項目応答理論の時間発展版と見ることもできる。代表的な手法としては、二値分類問題としてモデル化する手法 [4] [5]、隠れマルコフモデルをベースとした時系列の確率モデルによる手法 [6]、Recurrent Neural Networks (RNNs) をベースとした時系列の深層学習モデル [7] [8] が提案されている。

またナレッジトレーシングでは、教育ドメインの特性上、予測精度以外に予測モデルの解釈性、予測理由の説明性が重要となる。予測モデルの解釈性は、予測モデルが人間に理解可能かどうかである。深層学習モデルは非常に複雑で人間が理解することは難しく、解釈性は低いとされる。こうした挙動が完全にはわからない予測モデルは、問題が発生しても対処できないため学校教育に利用することは難しい。また、予測理由の説明性は、問題の正誤予測においてその理由を学習者または教師が理解可能な形でフィードバックできるかどうかであり、予測理由を提示することで、学習者は自分に何が足りないものを認識でき、または教師がその子に何が足りないかを認識でき、その後の学習や指導に役立てることができる。さらに、予測には不確実性が伴うため、予測の不確かさについても学習者または教師にフィードバックすることで、どの程度フィードバックを信じるべきか判断することができるため有用である。

予測理由の説明には、人間が理解可能なスキル名を使った説明が必要不可欠であり、多次元項目応答理論における非補償型モデルを使った説明が適している。例えば、方程式 $\frac{1}{5}x + \frac{3}{10} = 2x$ を解くためには、分数のスキルと方程式のスキルの両方が満たされないと解くことはできない。このように問題を解くために必要なスキルは、多くの場合 AND 条件で記述されており、このようなモデルは多次元項目応答理論において非補償型モデルと呼ばれている。学習者の潜在スキルの時間変化がない、項目応答データの確率モデルについては、[9] [10] が提案されているが、学習者の潜在スキルが時間変化するナレッジトレーシングにおいて、非補償型モデルを使った確率モデルと、時間変化する学習者の潜在スキルの事後分布を推定する方法は我々の知る限り提案されていない。これは、ナレッジトレーシング研究がこれまで予測にフォーカスしてきたためと考えられる。学習者へ予測理由を説明することを考えなければ、学習者の潜在スキル状態を低次元空間に埋め込みロジスティック回帰する方法 [6] [7] [8] でも十分である。また、[9] [10] はサンプリングを用いた推定方法であるため、学習者の潜在スキルをリアルタイムに推定できることが望ましいナレッジトレーシングにおいては直接応用することは適さず、また解析的に事後分布を求めようとしても非補償型モデルの尤度関数が複雑であるため解析解は求まらない。

そこで、本研究では非補償型の項目応答モデルを持つ確率モデルによる解釈可能なナレッジトレーシングを提案する。提案モデルは、線形動的システムをベースとして出力確率が非補償型の項目応答モデルである。線形動的システムにおける状態の事後分布はガウス分布であるため解析的に計算可能であるが、非補償型の項目応答モデルを導入することで、ガウス分布ではなくなり解析的に計算ができなくなる。そこで、非補償型の尤度関数を局所的変分法によりガウス近似することで、事後分布を解析的にガウス近似する。事後分布がガウス分布で近似することにより、モデルパラメータの学習は、線形動的システムとほぼ同様に行うことができ、非補償型項目応答モデルのパラメータの最適化のみモンテカルロ EM [11] を用いる。

以下、2章で提案手法の基礎となる確率モデルとして、多次元項目応答理論と線形動的システムについて説明する。次に、3章にて、提案手法である非補償型の時系列 IRT について説明し、4章にて、提案手法について事後分布の近似に関する実験結果、ASSISTments データによる予測精度の実験結果について示す。5章にて、関連研究を述べ、6章にてまとめる。

2. 準備

まず、提案手法のベースとなる多次元項目応答理論と線形動的システムについて説明する。

2.1. 多次元項目応答理論

項目応答理論は、各問題を各学習者が正解したかどうかのテスト結果のデータから、各問題の難易度、各学習者の能力の推定などに用いられる。項目応答理論では通常、学習者の能力を一次元の値として扱うが、多次元項目応答理論では多次元の値として扱う。例えば、複数のスキルを必要とする問題で構成されるテストの結果から、学習者の各スキルの習熟度を測定する場合などで多次元項目応答理論が利用される。

多次元項目項目応答理論は、補償型 (compensatory) と非補償型 (non-compensatory) のモデルに大別することができる。補償型モデルでは、問題を解くためには複数スキルの総和が高ければ正解できるという仮定をおく。一方で、非補償型モデルでは、問題を解くためにはすべてのスキルが高くなければ正解できないという仮定をおく。どちらのモデルを利用するかは、そのデータの生成がどちらの仮定の方が適切かで分析者が選択する。

補償型モデルでは、問題 i を学習者 j が正解するかどうかを確率変数 $y_{i,j} \in \{0, 1\}$ で表し、正解する確率を

$$p(y_{i,j} = 1 | z_j, \mathbf{a}_i, b_i) = \frac{1}{1 + \exp(-(\mathbf{a}_i^T \mathbf{z}_j - b_i))} \quad (1)$$

のように定義する。ここで、 \mathbf{z}_j は学習者 i の各スキルの習熟度を表すベクトル、 \mathbf{a}_i は問題 i における各スキルの識別力を表すベクトル、 b_i は問題 i の難易度である。補償型では、各スキルの習熟度が足し合わされるため、各スキルはお互いに補完できるとするモデルになっている。

非補償型モデルでは、問題 i を学習者 j が正解する確率を

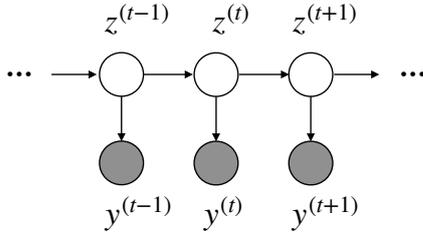


図 1: LDS のグラフィカルモデル.

$$p(y_{i,j} = 1 | z_j, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i) = \prod_k \frac{1}{1 + \exp(-(a_{i,k} z_{j,k} - b_{i,k}))} \quad (2)$$

のように定義する。ここで、 k はスキルのインデックスを表し、問題の難易度パラメータ \mathbf{b}_i は補償型の場合とは異なり、各スキル毎の値を持つベクトルとなっている。非補償型では、各スキルの習熟度が掛け合わされるため、各スキルはお互いに補完できないモデルになっている。

2.2. 線形動的システム

線形動的システム (linear dynamic system, LDS) [12] は、状態が時間変化しているときに各時刻 t の状態 $z^{(t)}$ に応じてデータ $y^{(t)}$ が観測される場合に用いられるモデルであり、ロボットの位置推定などに利用することができる。

LDS の確率モデルは、遷移確率と出力確率と初期状態確率により

$$p(z^{(t)} | z^{(t-1)}) = \mathcal{N}(z^{(t)} | Dz^{(t-1)}, \Gamma) \quad (3)$$

$$p(y^{(t)} | z^{(t)}) = \mathcal{N}(y^{(t)} | Cz^{(t)}, \Sigma) \quad (4)$$

$$p(z^{(1)}) = \mathcal{N}(z^{(1)} | \boldsymbol{\mu}_0, P_0) \quad (5)$$

と記述される。初期状態は平均 $\boldsymbol{\mu}_0$ 、共分散 P_0 のガウス分布に従って発生し、各時刻における状態は線形変換 D と平均 0 、共分散 Γ のガウスノイズにより遷移する。データは、状態に線形変換 C と平均 0 、共分散 Σ のガウスノイズが加わり観測される。また、LDS のグラフィカルモデルは図 1 で表される。観測変数は黒丸、潜在変数は白丸で表す。

LDS において観測データが与えられた場合の潜在変数の事後確率の算出方法について述べる。隠れマルコフモデルと同様にフォワード再帰とバックワード再帰と呼ばれる式を順方向、逆方向に適用することで事後確率が算出でき、前者はカルマンフィルタ (Kalman filter)、後者はカルマン smoother (Kalman smoother) と呼ばれる。

フォワード再帰では、データ $\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(t)}$ が与えられた上での潜在変数 $z^{(t)}$ の事後確率

$$\hat{\alpha}(z^{(t)}) := p(z^{(t)} | \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(t)}) \quad (6)$$

を $t = 1$ から順に $t = T$ まで算出する。これを $\hat{\alpha}$ メッセージと呼ぶ。 $\hat{\alpha}$ メッセージの計算には次の再帰式を利用する。

$$\hat{\alpha}(z^{(t)}) \propto p(\mathbf{y}^{(t)} | z^{(t)}) \int p(z^{(t)} | z^{(t-1)}) \hat{\alpha}(z^{(t-1)}) dz^{(t-1)} \quad (7)$$

$$\propto p(\mathbf{y}^{(t)} | z^{(t)}) p(z_j^{(t)} | y_j^{(1)}, \dots, y_j^{(t-1)}) \quad (8)$$

式 (7) から $\hat{\alpha}(z^{(t-1)})$ がガウス分布であれば、 $\hat{\alpha}(z^{(t)})$ もガウス分布になることが分かる。 $t = 1$ の場合、 $\hat{\alpha}(z^{(1)}) = p(z^{(1)} | \mathbf{y}^{(1)})$ がガウス分布であることから、すべてのフォワード再帰はガウス分布となる。バックワード再帰についても、同様にガウス分布で計算することができ、こちらは γ メッセージと呼ばれる。

LDS のパラメータの学習について述べる。LDS のパラメータは、 $\boldsymbol{\theta} = \{D, \Gamma, C, \Sigma, \boldsymbol{\mu}_0, P_0\}$ であり、EM アルゴリズムを用いて学習することができる。E ステップでは、フォワード再帰とバックワード再帰を用いて現在のパラメータにおける潜在変数の事後分布 $p(z^{(t)} | \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(T)}; \boldsymbol{\theta}^{old})$ を算出する。M ステップでは、E ステップで求めた事後分布を用いて、完全対数尤度の期待値

$$Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{old}) = \mathbb{E}[\ln p(\mathbf{y}^{(1:T)}, z^{(1:T)}; \boldsymbol{\theta})] \quad (9)$$

を、パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ について最大化する。上記の線形動的システムではすべてのパラメータについて解析解が求まる。

3. 非補償型時系列 IRT

本章では、提案手法である非補償型時系列 IRT について説明する。非補償型時系列 IRT は、線形動的システムの出力確率がガウス分布ではなく、非補償型項目応答モデルの尤度関数になっている。この変更により $\hat{\alpha}$ メッセージと γ メッセージがガウス分布では表現できなくなる。そこで本研究では、局所の変分法 [13] により、非補償型項目応答モデルの尤度関数をガウス分布で近似する。具体的には、非補償型項目応答モデルの尤度関数の変分下界を指数 2 次形式で求め、変分パラメータを最適化することでガウス近似を得る。尤度関数がガウス近似されることで、線形動的システムと同様の方法で潜在状態の事後分布とパラメータの学習が可能になる。以下ではまず、非補償型時系列 IRT の生成モデルについて説明し、次に非補償型の尤度関数を局所ガウス近似する方法 (指数 2 次形式で変分下界を求める方法) を説明し、最後に変分パラメータの最適化方法を説明する。モデルパラメータの学習は紙面の都合上省略するが、出力確率のパラメータの最適化のみモンテカルロ EM [11] を使い、他は線形動的システムと同様に行えばよい。

3.1. 生成モデル

非補償型時系列 IRT の生成モデルは、線形動的システムと同様に状態遷移確率、出力確率、初期状態確率により次の

$$p(z_j^{(t+1)} | z_j^{(t)}) = \mathcal{N} \left(z_j^{(t+1)} \mid D_{i(j,t)} z_j^{(t)} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \beta_k^T \mathbf{x}_{j,k}^{(t+1)} \\ \vdots \end{bmatrix}, \Gamma_{i(j,t+1)} \right) \quad (10)$$

$$p(y_j^{(t)} = 1 | z_j^{(t)}) = \prod_k \sigma \left(a_{i(j,t),k} z_{j,k}^{(t)} - b_{i(j,t),k} \right)^{Q_{i(j,t),k}} \quad (11)$$

$$p(z_j^{(1)}) = \mathcal{N}(z_j^{(1)} | \boldsymbol{\mu}_0, P_0) \quad (12)$$

で定義される。ここで、学習者 $j \in \{1, \dots, N\}$ の時刻

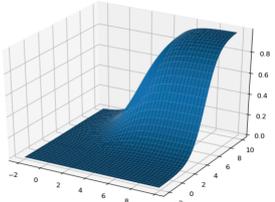


図 2: 正解側の尤度関数

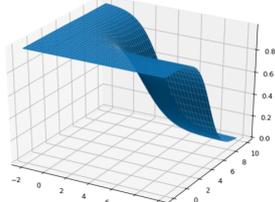


図 3: 不正解側の尤度関数

$t \in \{1, \dots, T_j\}$ のスキル状態を確率変数 $z_j^{(t)} \in \mathbb{R}^K$ で表し、学習者 j が時刻 t に取り組んだ問題に正解できたかどうかを確率変数 $y_j^{(t)} \in \{0, 1\}$ で表す。 $Q_{i,k} \in \{0, 1\}$ は問題とスキルの対応表で、問題 $i \in \{1, \dots, M\}$ を解くためにスキル $k \in \{1, \dots, K\}$ が必要であれば 1、不要であれば 0 である。問題とスキルの対応表 Q はデータとして与えられているとする。 $i(j, t)$ は、学習者 i が時刻 t に取り組んだ問題インデックスを表し、以降で文脈から明らかな場合には省略する場合がある。 $\mathbf{x}_{j,k}^{(t)} \in \mathbb{R}^{F_k}$ は状態遷移の共変量であり任意の情報を入れ込むことができる。例えば、学習者の属性 (e.g., 年齢) や学習者 j がスキル k を含む問題を最後に学習した時からの経過時間から考えられる忘却率 $2^{-\frac{h}{\Delta}}$ (Δ : 経過時間, h : 半減期) などである。また、問題ごとのバイアス項も $\mathbf{x}_{j,k}^{(t)}$ に次元を用意し、1 を立てることで表現することができる。 D_i, Γ_i は共に対角行列で、 $Q_{i,k} = 1$ である k に対しては $(D_i)_{k,k} = d_{i,k}, (\Gamma_i)_{k,k} = \gamma_k$ であり、 $Q_{i,k} = 0$ である k に対しては、 $(D_i)_{k,k} = 1, (\Gamma_i)_{k,k} = 0$ とする^(注1)。

3.2. 局所ガウス近似

本節では、不正解側、正解側の順に尤度関数の局所ガウス近似方法を説明する。本節と次節ではある学習者 j が時刻 t に問題 $i(j, t)$ を解いた場合を考え、煩雑さを避けるためにインデックス j, t を省略する。また、スキルインデックス k は問題 i に関係する $Q_{i,k} = 1$ であるスキルのみを対象にする。学習者のスキル状態には問題 i に関係する部分を切り出した変数 $\mathbf{z}_a \in \mathbb{R}^{K_i}$ を使う。 K_i は、問題 i が必要とするスキル数である。 \mathbf{z}_a を使い、式 (11) は $p(y = 1 | \mathbf{z}_a) = \prod_{k=1}^{K_i} \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k}))$ と表現できる。

3.2.1 不正解側尤度のガウス近似

不正解側尤度関数は $p(y = 0 | \mathbf{z}_a) = 1 - \prod_k \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k}))$ であり、図 3 の形をしている。形がガウス分布と大きく異なるため、全体をガウス分布で近似しても良い $\hat{\alpha}$ メッセージの近似にはならない。そこで、変分ロジスティック回帰 [13] で利用されている局所変分法を用いる。具体的には、尤度関数の変分下界を指数 2 次形式で求めることで尤度関数をガウス近似する。変分下界に含まれる変分パラメータは周辺尤度を最大化することにより決定する。周辺尤度を最大化するように変分下界を最適化するため、事前分布付近で尤度関数を局所的にガウス近似することになる。本節では、変分パラメータの値は既知とし、最適な変分パラメータの求め方は 3.3 節で説明する。

変分下界を求める手順は次の 2 つのステップからなる。まず、ステップ 1 では事前分布の中心における尤度関数の勾配を

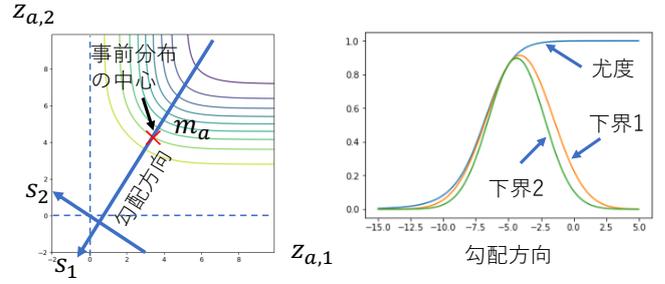


図 4: 変分下界導出ステップ 1

算出し (図 4 左)、尤度関数を勾配方向で 1 次元化する (図 4 右の尤度関数)。1 次元化された尤度関数に対して、指数 2 次下界を導出する (図 4 右の下界 2)。ここまでで、ガウス近似の中心ベクトルと勾配方向の分散までが得られたことになる。次に、ステップ 2 では勾配方向に直交する他の成分についての共分散行列を考える。ここで、尤度関数の等高線が凸関数であることに注意すると、勾配方向に直交する方向では尤度関数は上昇する。そのため、どのような共分散行列を用いても下界となる。ここでは事前分布の勾配方向に直交する成分の共分散行列を利用する。(図 5 左) 以下、ステップ 1 とステップ 2 について順に具体的に下界を導出する。

ステップ 1 では、まずシグモイド関数の変分下界 [13] を利用できるように不正解尤度をシグモイド関数の積の和の形式に変換する。

$$\begin{aligned} p(y=0 | \mathbf{z}_a) &= 1 - \prod_k \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k})) \\ &= \sum_{l=1}^{2^{K_i}-1} \prod_k \sigma(\text{sign}(l, k) (a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k}))) \quad (13) \end{aligned}$$

ここで、 $\text{sign}(l, k)$ は l を二進数表記にしたときの k ビット目が 0 であれば -1 であれば $+1$ とする。次に、 z 座標系から勾配方向に軸を取り直した s 座標系 (図 4 左) に変換し、 s_1 軸方向に 1 次元化する。 z 座標系と s 座標系の変換を

$$\mathbf{z}_a = W \left(\mathbf{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{W}^T \mathbf{m}_a \end{bmatrix} \right) \quad (14)$$

で定義する。行列 W の各列は正規直交基底をなし、1 列目のベクトルは勾配 $\nabla p(y = 0 | \mathbf{z}_a) |_{\mathbf{m}_a}$ 方向とする。また、 \underline{W}^T を W^T から 1 行目を除いたものとする。式 (14) に $\mathbf{s} = [s_1, 0, \dots, 0]^T$ を代入することで勾配方向に 1 次元化した場合の $z_{a,k}$ と s_1 の関係式が次の

$$z_{a,k} = \mathbf{w}_{k,:} \begin{bmatrix} s_1 \\ \underline{W}^T \mathbf{m}_a \end{bmatrix} = w_{k,1} s_1 + \mathbf{w}_{k,2} \cdot \underline{W}^T \mathbf{m}_a \quad (15)$$

で表せる。 $\mathbf{w}_{k,:}$ は、行列 W の k 行目の行ベクトルを表し、 $\mathbf{w}_{k,2}$ を行列 W の k 行目の 2 列目以降の行ベクトルを表す。これを式 (13) に代入すると、勾配方向に 1 次元化した尤度

$$= \sum_{l=1}^{2^{K_i}-1} \prod_k \sigma(\text{sign}(l, k) (a_{i,k}(w_{k,1} s_1 + \mathbf{w}_{k,2} \cdot \underline{W}^T \mathbf{m}_a - b_{i,k})))$$

(注1) : 決定的な遷移を表現するために便宜的に分散を 0 と表現した。

$$= \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} \prod_k \sigma(\tilde{a}_{l,i,k}s_1 - \tilde{b}_{l,i,k}) \quad (16)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{l,i,k} &= \text{sign}(l,k)a_{i,k}w_{k,1} \\ \tilde{b}_{l,i,k} &= -\text{sign}(l,k)a_{i,k}(\mathbf{w}_{k,2}:W^T\mathbf{m}_a - b_{i,k}) \end{aligned}$$

とする。ここでシグモイド関数の変分下界

$$\sigma(z) \geq \sigma(\xi) \exp\left(\frac{1}{2}(z-\xi) - \lambda(\xi)(z^2 - \xi^2)\right) \quad (17)$$

を適用すると

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} \left(\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \right) \exp(-A_l s_1^2 + B_l s_1 + C_l) \quad (18) \\ &(\text{:= } \text{lb}_1(s_1, \xi)) \end{aligned}$$

となる。(図4右の下界1) ただし、 $\xi_{l,k} = \tilde{a}_{l,i,k}\xi - \tilde{b}_{l,i,k}$, $\lambda(\xi) = \frac{1}{2\xi}(\sigma(\xi) - \frac{1}{2})$,

$$A_l = \sum_k \lambda(\xi_{l,k}) \tilde{a}_{l,i,k}^2$$

$$B_l = \sum_k 2\lambda(\xi_{l,k}) \tilde{a}_{l,i,k} \tilde{b}_{l,i,k} + \frac{1}{2} \tilde{a}_{l,i,k}$$

$$C_l = \sum_k \lambda(\xi_{l,k}) (\xi_{l,k}^2 - \tilde{b}_{l,i,k}^2) - \frac{1}{2} (\xi_{l,k} + \tilde{b}_{l,i,k})$$

である。 ξ は変分パラメータである。さらに、対数を取り Jensen の不等式を適用すると、対数尤度の2次下界

$$\begin{aligned} &\ln p(y=0|z_a) \\ &\geq \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} q_l \ln \left[\frac{\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \exp(-A_l s_1^2 + B_l s_1 + C_l)}{q_l} \right] \\ &= - \left(\sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} q_l A_l \right) s_1^2 + \left(\sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} q_l B_l \right) s_1 \\ &\quad + \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} q_l \left[C_l - \ln q_l + \sum_k \ln \sigma(\xi_{l,k}) \right] \quad (19) \end{aligned}$$

が得られる。(図4右の下界2) ただし、

$$q_l \propto \left[\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \right] \exp(-A_l s_1^2 + B_l s_1 + C_l) \quad (20)$$

とする。

次に、ステップ2ではステップ1で求めた勾配方向での1次元下界を多次元での下界にする。まず、 s 座標系における多次元下界を求め、それを z 座標系に変換することで最終的に z 座標系における多次元ガウス分布を求める。事前分布を $\mathcal{N}(\mathbf{z}_a | \mathbf{m}_a, G_{a,a})$ とすると、変換式(14)を用いて s 座標系での表現を求めると、精度行列は $\Lambda = W^T G_{a,a}^{-1} W$ となる。さらに、シュア補行列の変換を利用すると、 s_1 方向を周辺化した事前分布の精度行列は

$$\Lambda_{\setminus s_1} = \Lambda_{2:K_i, 2:K_i} - \Lambda_{2:K_i, 1} \Lambda_{1,1}^{-1} \Lambda_{1, 2:K_i} \quad (21)$$

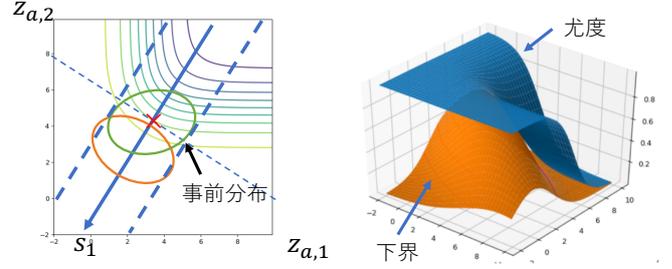


図5: 変分下界導出ステップ2

と計算できる。以上により、 s 座標系における尤度関数のガウス近似は $\mathcal{N}(s | \boldsymbol{\eta}_s, \Psi_s)$ となる。

$$\boldsymbol{\eta}_s = \begin{bmatrix} \sum_l q_l B_l \\ 2 \sum_l q_l A_l \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \Psi_s^{-1} = \begin{bmatrix} 2(\sum_l q_l A_l) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{\setminus s_1} \end{bmatrix}.$$

これを再び変換式(14)を利用して z 座標系に戻すと、最終的な尤度関数のガウス近似 $\mathcal{N}(\mathbf{z}_a | \boldsymbol{\eta}, \Psi)$ が得られる。(図5右の下界)

$$\boldsymbol{\eta} = W \begin{bmatrix} \sum_l q_l B_l \\ 2 \sum_l q_l A_l \\ W^T \mathbf{m}_a \end{bmatrix}, \Psi^{-1} = W \begin{bmatrix} 2(\sum_l q_l A_l) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{\setminus s_1} \end{bmatrix} W^T.$$

3.2.2 正解側尤度のガウス近似

正解側の尤度関数は $\prod_k \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k}))$ である(図2). 各 k について式(17)のシグモイド関数の変分下界を適用することで、指数2次形式の下界を得る。さらに対数を取り、 $z_{a,k}$ について平方完成することで以下が得られる。

$$\begin{aligned} &\ln \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k})) \\ &\geq -\lambda(\xi_{i,k})(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k}))^2 + \frac{1}{2}(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k})) \\ &\quad + \text{const} \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq -\frac{2(\lambda(\xi_{i,k})a_{i,k}^2)}{2} \left(z_{a,k} - \left(b_{i,k} + \frac{1}{4\lambda(\xi_{i,k})a_{i,k}} \right) \right)^2 \\ &\quad + \text{const.} \quad (23) \end{aligned}$$

以上により、正解側尤度関数のガウス近似は $\mathcal{N}(z_a | \boldsymbol{\eta}, \Psi)$ となる。共分散行列は対角行列である。

$$\boldsymbol{\eta}_k = b_{i,k} + \frac{1}{4\lambda(\xi_{i,k})a_{i,k}}, \quad \Psi_{k,k}^{-1} = 2\lambda(\xi_{i,k})a_{i,k}^2.$$

3.3. 変分パラメータの最適化

3.2.1節、3.2.2節で導入した変分下界には変分パラメータが存在する。本節では、不正解側、正解側の順に変分パラメータの最適化方法を述べる。

まず不正解側の変分パラメータは ξ である。前節で求めた s 座標系における s_1 成分の1次元下界 $\text{lb}_1(s_1, \xi)$ と、事前分布の s_1 についての周辺確率 $p(s_1) = \mathcal{N}(s_1 | m_{s_1}, \sigma_{s_1}^2)$ を用いると、

$$\int p(y=0|z_a)p(s_1)ds_1 \geq \int \text{lb}_1(s_1, \xi)p(s_1)ds_1 \quad (24)$$

が成り立つ。右辺を ξ に関して最大化することにより、変分パ

ラメータ ξ を最適化する。右辺はガウス分布の積の形をしているため指数部を s_1 に関して平方完成することで、

$$\begin{aligned} & \int \text{lb}_1(s_1, \xi) p(s_1) ds_1 \\ &= \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} \left(\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \right) \int \exp(-A_l s_1^2 + B_l s_1 + C_l) \\ & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s_1}^2}} \exp\left(\frac{1}{2\sigma_{s_1}^2}(s_1 - m_{s_1})^2\right) ds_1 \\ &= \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} \left(\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \right) (1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \exp\left(\frac{\left(\frac{m_{s_1}}{\sigma_{s_1}^2} + B_l\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sigma_{s_1}^2} + 2A_l\right)} - \frac{m_{s_1}^2}{2\sigma_{s_1}^2} + C_l\right) \end{aligned} \quad (25)$$

と計算できる。次に、対数を取り Jensen の不等式を適用することで

$$\begin{aligned} & \ln \int \text{lb}_1(s_1, \xi) p(s_1) ds_1 \\ & \geq \sum_{l=1}^{2^{K_i-1}} Q_l \left[\sum_k \ln \sigma_{\xi_{l,k}} - \frac{1}{2} \ln(1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left(\frac{m_{s_1}}{\sigma_{s_1}^2} + B_l\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sigma_{s_1}^2} + 2A_l\right)} - \frac{m_{s_1}^2}{2\sigma_{s_1}^2} + C_l \right] + \text{const} \\ & \quad (:= \text{lb}_2(\xi)) \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} Q_l & \propto \left(\prod_k \sigma(\xi_{l,k}) \right) (1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2)^{-\frac{1}{2}} \\ & \quad \exp\left(\frac{\left(\frac{m_{s_1}}{\sigma_{s_1}^2} + B_l\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sigma_{s_1}^2} + 2A_l\right)} - \frac{m_{s_1}^2}{2\sigma_{s_1}^2} + C_l\right) \end{aligned}$$

とした。次に、 $\text{lb}_2(\xi)$ を ξ に関して微分すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \text{lb}_2(\xi) \\ &= \sum_l Q_l \left[\sum_k (1 - \sigma(\xi_{l,k})) \frac{\partial \xi_{l,k}}{\partial \xi} \right. \\ & \quad - \frac{\sigma_{s_1}^2}{(1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2)} \frac{\partial A_l}{\partial \xi} + \frac{m_{s_1} + B_l\sigma_{s_1}^2}{(1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2)} \frac{\partial B_l}{\partial \xi} \\ & \quad \left. - \frac{(m_{s_1} + B_l\sigma_{s_1}^2)^2}{(1 + 2A_l\sigma_{s_1}^2)^2} \frac{\partial A_l}{\partial \xi} + \frac{\partial C_l}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_l}{\partial \xi} &= \sum_k \tilde{a}_{l,i,k}^3 \lambda'(\xi_{l,k}) \\ \frac{\partial B_l}{\partial \xi} &= \sum_k 2\tilde{a}_{l,i,k}^2 \tilde{b}_{l,i,k} \lambda'(\xi_{l,k}) \\ \frac{\partial C_l}{\partial \xi} &= \sum_k \lambda'(\xi_{l,k}) \tilde{a}_{l,i,k} (\xi_{l,k}^2 - \tilde{b}_{l,i,k}^2) \end{aligned}$$

$$+ 2\xi_{l,k} \tilde{a}_{l,i,k} \lambda(\xi_{l,k}) - \frac{1}{2} \tilde{a}_{l,i,k}$$

$$\lambda'(\xi_{l,k}) = -\frac{\lambda(\xi_{l,k})}{\xi_{l,k}} + \frac{1}{2\xi_{l,k}} \sigma(\xi_{l,k}) (1 - \sigma(\xi_{l,k})) \quad (28)$$

である。微分が求まったため、2分探索などを使い微分が0となる ξ を求めることができる。

次に、正解側の変分パラメータ ξ_k の最適化について述べる。正解側の変分パラメータの最適化は、

$$\begin{aligned} & \ln \int \sigma(a_{i,k}(z_{a,k} - b_{i,k})) p(z_{a,k}) dz_{a,k} \\ & \geq \ln \int \sigma(\xi_k) \exp\left\{-\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 (z_{a,k} - b_{i,k})^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} a_{i,k} (z_{a,k} - b_{i,k}) - \frac{1}{2} \xi_k + \lambda(\xi_k) \xi_k^2\right\} \\ & \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_k^2} (z_{a,k} - m_{a,k})^2\right) dz_{a,k} \\ & \quad (:= \text{lb}_3(\xi_k)) \end{aligned} \quad (29)$$

の右辺を ξ_k について最大化することによって行う。ここで右辺はガウス分布の積の形をしているため、指数部を平方完成することで積分が計算でき、

$$\begin{aligned} \text{lb}_3(\xi_k) &= \ln \sigma(\xi_k) - \frac{1}{2} \ln\left(\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 + \frac{1}{2} \phi_k\right) \\ & \quad - \lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 b_{i,k}^2 - \frac{1}{2} \xi_k + \lambda(\xi_k) \xi_k^2 \\ & \quad + \frac{2\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 b_{i,k} + \frac{1}{2} a_{i,k} + m_{a,k} \phi_k}{4\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 + 2\phi_k} + \text{const} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\phi_k = \frac{1}{\sigma_k^2}$ とした。さらに ξ_k に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{lb}_3}{\partial \xi_k} &= (1 - \sigma(\xi_k)) - \frac{\lambda'(\xi_k) a_{i,k}^2}{S_2} - \lambda'(\xi_k) a_{i,k}^2 b_{i,k}^2 - \frac{1}{2} \\ & \quad + \lambda'(\xi_k) \xi_k^2 + 2\lambda(\xi_k) \xi_k + \frac{S_1}{S_2} \lambda'(\xi_k) a_{i,k}^2 \left(2b_{i,k} - \frac{S_1}{S_2}\right) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\begin{cases} S_1 &= 2\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 b_{i,k} + \frac{a_{i,k}}{2} + m_{a,k} \phi_k \\ S_2 &= 2\lambda(\xi_k) a_{i,k}^2 + \phi_k \end{cases}$$

とする。以上で微分が求まったため、不正解側と同様に2分探索などを用いて、微分が0となる ξ_k を求めることができる。

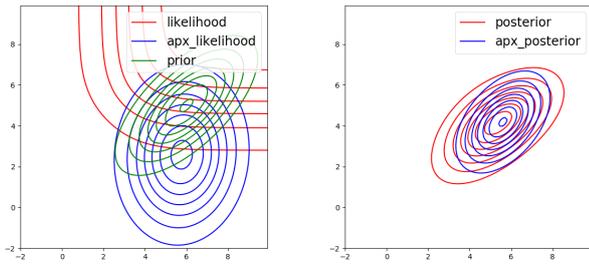
4. 実験

本章では、3.2節で説明した局所ガウス近似により $\hat{\alpha}$ メッセージがどう近似されるかを人工データにより示し、次に AS-SISTments Data を用いた予測精度の実験結果について示す。

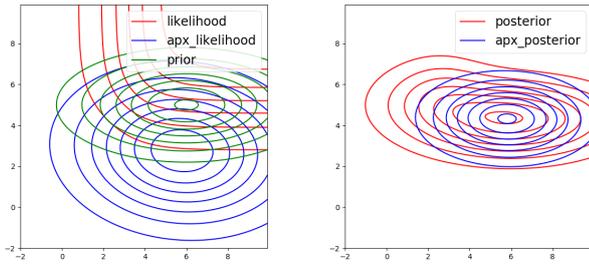
4.1. $\hat{\alpha}$ メッセージの近似

非補償型の項目応答モデルにおける尤度関数を局所ガウス近似することで得られる近似事後分布 ($\hat{\alpha}$ メッセージ) と真の事後分布を人工データにより比較する。紙面の制約上、不正解側と正解側それぞれ2つの場合のみを示す。

まず、図6に不正解側の尤度関数のガウス近似についての結果を示す。図6aと図6bは、ある尤度関数(左図の赤)と事前分布



(a)



(b)

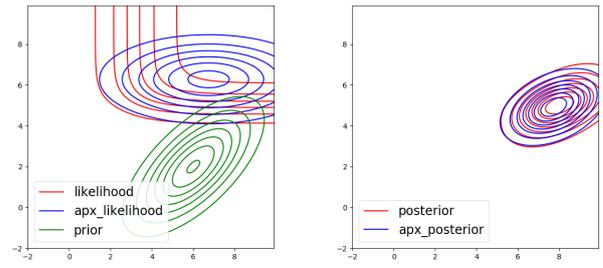
図 6: 不正解側のガウス近似と近似事後分布

(左図の緑)が与えられた時の、尤度関数の局所ガウス近似(左図の青)と真の事後分布(右図の赤)と近似事後分布(右図の青)を示している。尤度関数は $p(y = 0|z) = 1 - \sigma(z_1 - 3.0)\sigma(z_2 - 5.0)$ である。左図を見ると、尤度関数が事前分布付近で局所ガウス近似され、異なるガウス近似が得られていることが分かる。また、事前分布の中心の勾配方向と直交する方向では事前分布と同じ分散を尤度関数のガウス近似が持っている。右図を見ると、近似事後分布が真の事後分布をおおよそ捉えていることが見て取れる。中心はほぼ等しい一方で、分散は過小評価している。これは、尤度関数を下からガウス分布で抑えるためこのような傾向となることが考えられる。

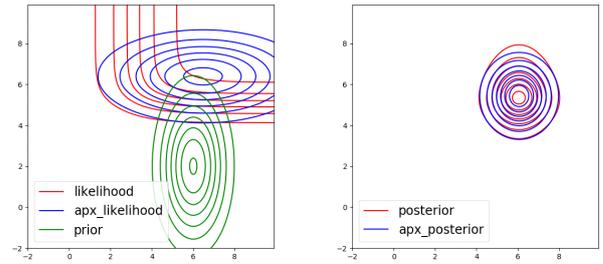
次に図 7 に正解側の尤度関数のガウス近似の結果を示す。図の見方は不正解側と同様である。尤度関数は $p(y = 1|z) = \sigma(z_1 - 3.0)\sigma(2.0(z_2 - 5.0))$ である。左図を見ると、事前分布に応じて尤度関数が局所ガウス近似されていることが分かり、また正解側のガウス近似は各次元ごとに行うため、ガウス分布の軸は z 座標系と並行になる。右図を見ると近似事後分布が真の事後分布をほぼ正確に近似できていることが分かる。正解側の方が不正解側の近似よりも正確であることが分かる。

4.2. 予測精度

2009-2010 ASSISTment Data (Skill Builder) [14] を使い予測精度の実験を行った。ASSISTment Data は、生徒が e ラーニングシステムを用いて問題を解いた時系列の正誤ログデータであり、問題に対して複数のスキルタグが付与されている。Skill Builder データは、スキルを育成することを目的としたもので、3 問連続問題を正解しないと宿題が完了できない。Skill Builder データのうち、少なくとも 10 名以上が解いている問題に関するログに絞り、ユーザ数 4,106、問題数 9,151、スキル数 106 のデータセットを作成した。比較手法として、深層学



(a)



(b)

図 7: 正解側のガウス近似と近似事後分布

表 1: 正解予測の結果

手法	適合率	再現率	F 値
提案手法	0.763 ± 0.005	0.827 ± 0.004	0.794 ± 0.004
DKT	0.743 ± 0.004	0.892 ± 0.006	0.811 ± 0.003
DKVMN	0.748 ± 0.004	0.838 ± 0.024	0.790 ± 0.010

表 2: 不正解予測の結果

手法	適合率	再現率	F 値
提案手法	0.609 ± 0.013	0.510 ± 0.010	0.555 ± 0.011
DKT	0.667 ± 0.015	0.413 ± 0.026	0.510 ± 0.024
DKVMN	0.601 ± 0.017	0.461 ± 0.035	0.521 ± 0.020

習ベースの DKT [7], DKVMN [8] を用いた。評価は 5 分割交差検定を用いて行い、正解予測と不正解予測について適合率、再現率、F 値を算出した。また DKT では `n_hidden` パラメータを {50, 100, 200} の中で最も良いものを選択し、DKVMN は `memory_size` と (`q_embed_dim`, `qa_embed_dim`) について、{20, 50, 100}, {(50, 100), (100, 200)} のグリッドで最も良いものを選択した。結果を表 1 と表 2 にそれぞれ示す。正解予測では、DKT がもっと良い F 値を示し、不正解予測では提案手法が最も良い F 値を示した。応用を考えると、不正解予測の性能が良い方が、学習者へのメリットが大きい。また、正解予測と不正解予測の総合 F 値を図 8 に示す。総合的には提案手法が DKT, DKVMN に対して高い F 値を示していることが分かる。

5. 関連研究

モデルが解釈可能なホワイトボックス型のナレッジトレーニングに関する研究について述べる。まず、1つのスキルを扱う場合と複数のスキルを扱う場合に大きく分かれ、複数のスキルを扱う場合、さらに人間が定義したスキルタグを利用する方法とそ

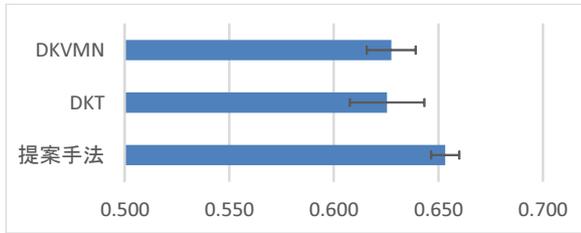


図 8: 正解と不正解の総合 F 値

うでない方法に分かれる。1つのスキルの習熟を追跡する方法で最も有名なものが Bayesian Knowledge Tracing(BKT) [15] である。BKT は隠れマルコフモデルであり、学習者の潜在スキル変数をバイナリの確率変数で表す。BKT は、[16] により、学習者ごとの個々の特性を反映する拡張が行われている。

複数のスキルを扱うナレッジトレーシングで、人間が定義したスキルタグを用いる方法には [17] [18] [19] [20] がある。[17] [18] [19] は、1つの問題に対し1つスキルを対応付ける一方で、[20] は1つの問題に複数のスキルを対応付ける。[20] は、出力確率はバイナリではなくスコア値であるが各スキルの総和でスコアを回帰するため補償型の出力確率を持つモデルである。

複数のスキルを扱うナレッジトレーシングで、人間が定義したスキルタグを必要としない方法に [6] [21] がある。[6] では、線形動的システムをベースとしており、本研究との大きな違いは出力確率が補償型か、非補償型かの違いである。補償型の出力確率であっても事後確率を解析的に求めることはできないため、EP 法を用いて事後確率をガウス近似する。[21] では、ナレッジトレーシングをテンソル分解として定式化する。これらの方法は、人間が定義した問題とスキルの対応表を必要としないため適用範囲が広いが予測理由の説明性は低い。

6. まとめ

本研究では、非補償型の項目応答モデルを持つ確率モデルによる解釈可能なナレッジトレーシングを提案した。提案モデルは、線形動的システムをベースとして出力確率が非補償型の項目応答モデルであった。非補償型の項目応答モデルを導入することで学習者の潜在スキルの事後分布が解析的に求められなくなる問題に対し、非補償型の尤度関数を局所的にガウス近似することで、近似事後分布を解析的に求める方法を導出し、生成モデルのパラメータは LDS と同様にして学習可能である。人工データにより、提案方法が真の事後分布を近似できていることを示し、さらに ASSISTment Data を使い深層学習ベースの DKT, DKVMN に対しても高い予測性能を示すことを確認した。

文 献

[1] Knewton - Achievement Within Reach. <https://www.knewton.com/>.
 [2] DreamBox Learning - Online Math Learning. <https://www.dreambox.com/>.
 [3] Hiroaki Ogata, Chengjiu Yin, Misato Oi, Fumiya Okubo, Atsushi Shimada, Kentaro Kojima, and Masanori Yamada. E-book-based learning analytics in university education. In *ICCE*, pages 401–406, 2015.

[4] Hao Cen, Kenneth Koedinger, and Brian Junker. Learning factors analysis—a general method for cognitive model evaluation and improvement. In *ITS*, pages 164–175. Springer, 2006.
 [5] Philip I. Pavlik, Hao Cen, and Kenneth R. Koedinger. Performance factors analysis—a new alternative to knowledge tracing. In *AIED*, pages 531–538. IOS Press, 2009.
 [6] Andrew S Lan, Christoph Studer, and Richard G Baraniuk. Time-varying learning and content analytics via sparse factor analysis. In *SIGKDD*, pages 452–461. ACM, 2014.
 [7] Chris Piech, Jonathan Bassen, Jonathan Huang, Surya Ganguli, Mehran Sahami, Leonidas J Guibas, and Jascha Sohl-Dickstein. Deep knowledge tracing. In *NeurIPS*, pages 505–513, 2015.
 [8] Jiani Zhang, Xingjian Shi, Irwin King, and Dit-Yan Yeung. Dynamic key-value memory networks for knowledge tracing. In *WWW*, pages 765–774, 2017.
 [9] Ben Babcock. Estimating a noncompensatory irt model using metropolis within gibbs sampling. *Applied Psychological Measurement*, 35(4):317–329, 2011.
 [10] Run ze Wu, Qi Liu, Yuping Liu, Enhong Chen, Yu Su, Zhigang Chen, and Guoping Hu. Cognitive modelling for predicting examinee performance. In *IJCAI*, 2015.
 [11] Greg CG Wei and Martin A Tanner. A monte carlo implementation of the em algorithm and the poor man’s data augmentation algorithms. *Journal of the American statistical Association*, 85(411):699–704, 1990.
 [12] Christopher M. Bishop. *Pattern Recognition and Machine Learning (Information Science and Statistics)*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2006.
 [13] Tommi S Jaakkola and Michael I Jordan. Bayesian parameter estimation via variational methods. *Statistics and Computing*, 10(1):25–37, 2000.
 [14] Mingyu Feng, Neil Heffernan, and Kenneth Koedinger. Addressing the assessment challenge with an online system that tutors as it assesses. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 19(3):243–266, 2009.
 [15] Albert T Corbett and John R Anderson. Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge. *User modeling and user-adapted interaction*, 4(4):253–278, 1994.
 [16] Michael V Yudelson, Kenneth R Koedinger, and Geoffrey J Gordon. Individualized bayesian knowledge tracing models. In *AIED*, pages 171–180. Springer, 2013.
 [17] Kevin H Wilson, Yan Karklin, Bojian Han, and Chaitanya Ekanadham. Back to the basics: Bayesian extensions of irt outperform neural networks for proficiency estimation. *arXiv preprint arXiv:1604.02336*, 2016.
 [18] Chaitanya Ekanadham and Yan Karklin. T-skirt: Online estimation of student proficiency in an adaptive learning system. *arXiv preprint arXiv:1702.04282*, 2017.
 [19] R.V. Lindsey, M. Khajah, and M.C. Mozer. Automatic discovery of cognitive skills to improve the prediction of student learning. *NeurIPS*, 2:1386–1394, 01 2014.
 [20] Yuying Chen, Qi Liu, Zhenya Huang, Le Wu, Enhong Chen, Runze Wu, Yu Su, and Guoping Hu. Tracking knowledge proficiency of students with educational priors. In *CIKM*, pages 989–998. ACM, 2017.
 [21] Shaghayegh Sahebi, Yu-Ru Lin, and Peter Brusilovsky. Tensor factorization for student modeling and performance prediction in unstructured domain. *EDM*, 2016.